# Solucionario problemas tema 4

# ECUACIONES E INECUACIONES

**4.21. *Unos amigos fueron a cenar y entre todos pagaron 437 €. Otro día fueron siete amigos más y pagaron 598 €. Si todos pagaron lo mismo ambos días, ¿cuántos eran y cuánto costaba el menú?**

Llamando $x$ al número de amigos que asistieron el primer día, sabemos que cada cena cuesta $\frac{437}{x}$ euros.

Como el segundo día asistieron $x$ + 7 amigos y cada uno pagó esa cantidad, tenemos la ecuación: $\frac{437}{x}(x+7)=598$. Quitando paréntesis, tenemos $437+\frac{3059}{x}=598$. Multiplicando la ecuación por $x$ y reagrupando, obtenemos la ecuación $161x - 3059 = 0$, cuya solución es $x = 19$. Así pues, el primer día asistieron 19 amigos y cada uno pagó 23 euros por la cena.

**4.22. *La suma de los inversos de dos números consecutivos es $\frac{5}{6}$. ¿Qué números son?**

Sean los números consecutivos $x$ y $x + 1$:

$\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}=\frac{5}{6}$. Resolvemos la ecuación.

$$6(x+1)+6x=5x(x+1)\Rightarrow 6x+6+6x=5x^2+5x\Rightarrow 5x^2-7x-6=0$$

$$x=\frac{+7\pm\sqrt{7^2-4\cdot5\cdot(-6)}}{2\cdot5}=\frac{+7\pm\sqrt{49+120}}{10}=\frac{+7\pm13}{10}=\begin{cases}\frac{20}{10}=2\\-\frac{6}{10}=-\frac{3}{5}\end{cases}$$

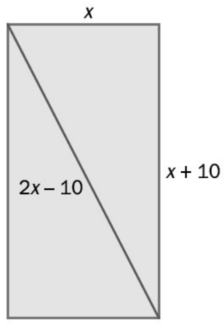
Pero para hablar de números consecutivos, éstos han de ser enteros, por lo que la solución son los números 2 y 3.

**4.25. Para ir de una esquina a la opuesta de un jardín rectangular que es 10 metros más ancho que largo, María va por la acera que lo rodea y su hermano va por el camino diagonal. Si María recorre 20 metros más que su hermano, ¿cuál es el área del jardín?**

Si llamamos $x$ al ancho del parque, María recorre $x + (x + 10) = 2x + 10$ metros y su hermano recorrerá $2x - 10$ metros. Aplicando el teorema de Pitágoras obtenemos la ecuación: $x^2+(x+10)^2=(2x-10)^2$.

Quitamos paréntesis y resolvemos la ecuación de segundo grado incompleta:

$x^2+x^2+20x+100=4x^2-40x+100$ ; $2x^2-60x=0$ cuyas soluciones son $x = 0$ y $x = 30$. Así pues, las dimensiones del jardín, en metros, son 30 $x$ 40 y su área 1200 m$^2$.



**4.33. ¿Qué condiciones debe cumplir un lado de un triángulo si los otros dos lados miden 2 y 5 cm?**

La condición que tiene que cumplirse es que cada lado sea menor que la suma de los otros dos y mayor que la diferencia. Así, llamando $x$ al lado que falta debe cumplirse:

$$\left.\begin{array}{l} x < 2 + 5 = 7 \\ x > 5 - 2 = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow 3 < x < 7$$

**4.34. Un ascensor soporta una tonelada. Álvaro quiere subir cajas y sacos. Las cajas pesan 35 kilos más que los sacos. Cuando lleva metidos cinco de cada uno, al meter otra caja salta la alarma, así que la cambia por un saco y no hay problemas. ¿Entre qué valores se encuentra el peso de un saco?**

Si un saco pesa $x$ kilos, una caja pesará $x + 35$ kilos.

$5x + 6\,(x + 35) > 1000$ y $6x + 5(x + 35\,) < 1000$

Así pues, $11x > 790$ y $11x < 825$. Tenemos $71{,}8 \cong \frac{790}{11} < x < \frac{825}{11} = 75$.

Un saco pesa entre 72 y 75 kilos aproximadamente.

**4.37. Quería repartir 400 euros entre cierto número de personas. El día del reparto faltaron 5 personas y así a cada una le correspondieron 4 euros más de lo que en un principio iba a ser. ¿Cuántas personas había al inicio?**

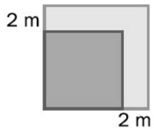
Si al principio había $x$ personas, a cada una le hubieran correspondido $\frac{400}{x}$ euros. Al faltar 5, cada una recibió $\frac{400}{x}$ + 4 euros.

Así pues, $(x-5)\cdot\left(\frac{400}{x}+4\right)=400$. $400+4x-\frac{2000}{x}-20=400$; $\quad 4x-20-\frac{2000}{x}=0$

Multiplicando por $x$ tenemos $4x^2-20x-2000=0$.

Resolvemos la ecuación equivalente $x^2-5x-500=0$ cuyas soluciones son $x$ = 25 y $x$ = –20. Así pues, al inicio había 25 personas.

**4.38. Si aumentamos los lados de un cuadrado en 2 metros, su área aumenta 28 m². ¿Cuánto mide el lado del cuadrado?**




Si el lado del cuadrado inicial es $x$, su área es $x^2$.

Al aumentar 2 metros el lado tenemos que $(x + 2)^2 = x^2 + 28$.

Elevando al cuadrado obtenemos la ecuación lineal $4x + 4 = 28$ y, por tanto $x = 6$.

**4.39. Un estudiante obtuvo en cuatro exámenes estas notas: 7, 7, 6 y 5. Si después de hacer el quinto examen su nota media no llegó al 6, ¿aprobó el último examen?**

Si en el último examen obtuvo x puntos, la nota media es $\frac{7+7+6+5+x}{5}<6$.

Resolviendo la inecuación tenemos que $25 + x < 30$; $x < 5$, así pues, el alumno no aprobó el último examen.

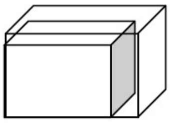
**4.40. En una cena, cada dos comensales compartieron un plato de arroz; cada tres comensales, uno de ternera con bambú, y cada cuatro, uno de gambas. Si en total se comieron 65 platos, ¿cuántos invitados había en la fiesta?**

Si $x$ es el número de comensales, había $\frac{x}{2}$ platos de arroz, $\frac{x}{3}$ platos de ternera con bambú y $\frac{x}{4}$ platos de gambas. Así pues, $\frac{x}{2}+\frac{x}{3}+\frac{x}{4}=65$.

Multiplicando por 12 tenemos $6x + 4x + 3x = 780$. $x = 60$.

Había 60 invitados.

**4.41. Si aumentamos en un centímetro el lado de un cajón cúbico, su volumen aumenta en 37 $cm^3$. ¿Cuánto mide el lado del cubo pequeño?**



Si $x$ es el lado del cubo inicial, su volumen es $x^3$. Al aumentar un centímetro el lado su volumen será $(x + 1)^3$ y obtenemos la ecuación $(x + 1)^3 = x^3 + 37$.

Elevamos al cubo con cuidado y obtenemos $x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = x^3 + 37$, que da lugar a la ecuación de segundo grado $3x^2 + 3x - 36 = 0$, equivalente $ax^2 + x - 12 = 0$, cuyas soluciones son $x = 3$ y $x = -4$.

El lado del cubo pequeño mide 3 cm.

**4.42. Mi vecina, que es muy presumida, no quiere confesar su edad, pero dice lo siguiente: "Dentro de 13 años tendré el doble de la edad que tenía hace 20 años". ¿Sabes cuántos años tiene?**

Si actualmente tiene $x$ años, dentro de 13 tendrá $x + 13$y hace 20 tenía $x - 20$, lo que nos da la ecuación $x + 13 = 2(x - 20)$, cuya solución es $x = 53$. Así pues, mi vecina tiene actualmente 53 años.

**4.44. Expresa en forma de ecuación.**

**a) Un número más su doble más su mitad es igual a 14.**

**b) Tres múltiplos de 5 consecutivos suman 165.**

**c) Un padre dobla en edad a su hijo y entre los dos suman 75 años.**

**d) La mitad de una parcela menos 200 metros cuadrados es igual a la tercera parte de la parcela original.**

a) $x + 2x + \frac{x}{2} = 14$

b) $5x + (5x + 5) + (5x + 10) = 165$ o $(5x - 5) + x + (5x + 5) = 165$

c) $x + 2x = 75$

d) $\frac{x}{2} - 200 = \frac{x}{3}$

**4.46. Escribe estos enunciados en lenguaje algebraico utilizando una sola incógnita.**

**a) La suma de los cuadrados de tres números impares consecutivos es 42.**

**b) Un tercio del cuadrado de la edad que tenía hace tres años es 26.**

a) Sean $2x + 1$, $2x + 3$ y $2x + 5$ los números impares consecutivos. Entonces la ecuación sería:

$(2x + 1)^2 + (2x + 3)^2 + (2x + 5)^2 = 42$.

b) Sea $x$ la edad actual. La ecuación viene dada por:

$\frac{(x-3)^2}{3} = 26$.

**4.49. José ha ganado un premio. Si lo reparte entre sus nietos, cada uno recibirá 3000 euros, pero si lo distribuye entre sus hijos, que son dos menos, cada uno tocará a 1000 euros más.**

**¿Cuántos nietos tiene José?**

**¿Cuánto dinero ha ganado en el premio?**

Sea $x$ el número de nietos. Por tanto, $x-2$ es el número de hijos.

Se iguala el premio cuando lo reparte entre hijos o nietos,

$3000x = 4000(x-2) \Rightarrow 3000x = 4000x - 8000 \Rightarrow x = 8$.

José tiene 8 nietos, y la cuantía del premio son 24 000 €.

**4.50. Varios compañeros de trabajo aciertan una porra y cada uno gana 15 euros. Si hubieran tenido que compartir el premio con 4 personas más, habrían tocado a 3 euros menos cada uno.**

**¿Cuántos compañeros jugaban la porra?**

Sea $x$ el número de compañeros que jugaban la porra.

$12(x+4) = 15x \Rightarrow 12x + 48 = 15x \Rightarrow 3x = 48 \Rightarrow x = 16 \Rightarrow$ Jugaban la porra 16 compañeros.

**4.51. Un padre tiene 50 años, y su hijo, 20. ¿Cuántos años hace que la edad del hijo fue la tercera parte de la del padre?**

$x$ = número de años que han pasado.

$\frac{50-x}{3} = 20 - x \Rightarrow 50 - x = 60 - 3x \Rightarrow 2x = 10 \Rightarrow x = 5 \Rightarrow$ hace 5 años.

**4.52. ¿Cuál es el número natural cuya cuarta parte es igual a la mitad del número anterior?**

Sea $x$ el número buscado: $\frac{x}{4} = \frac{x-1}{2} \Rightarrow 2x = 4x - 4 \Rightarrow 2x = 4 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow$ el número buscado es el 2.

**4.56. Las personas que asistieron a una reunión se estrecharon la mano. Uno de ellos advirtió que los apretones de manos fueron 66. ¿Cuántas personas concurrieron a la reunión?**

En la reunión hay $x$ personas. Cada persona da la mano a $x - 1$ personas.

$$\frac{x(x-1)}{2} = 66 \Rightarrow x(x-1) = 132 \Rightarrow x^2 - x - 132 = 0 \Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1-4\cdot(-132)}}{2} = \frac{1 \pm 23}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 12 \\ x = -11 \end{cases}$$

Concurrieron 12 personas.

**4.57. Si se suman dos múltiplos consecutivos de 5 y al resultado se le resta 5, se obtiene un número 20 veces menor que si se multiplican ambos números. Averigua de qué números se trata.**

Los múltiplos de 5 consecutivos son $(5x)$ y $(5x + 5)$.

$$20 \cdot [5x + (5x+5) - 5] = 5x(5x+5) \Rightarrow 20 \cdot 10x = 5x^2 + 25x \Rightarrow 25x^2 - 175x = 0 \Rightarrow x(x-7) = 0$$

Los posibles valores de $x$ son: $x = 0$ y $x = 7$.

Por tanto los números buscados son o bien 35 y 40, o bien 0 y 5.

**4.58. Comprueba que en las ecuaciones de segundo grado de la forma $x^2 + bx + c = 0$, que tienen dos soluciones, *b* es la suma de las soluciones cambiada de signo y *c* es el producto de las soluciones. A continuación, resuelve mentalmente:**

**a)** $x^2 - 7x + 12 = 0$ **b)** $x^2 + 3x - 10 = 0$

Las dos soluciones de la ecuación son $x = p$ y $x = q$, la ecuación es equivalente a $(x-p)\cdot(x-q) = 0$

.

Quitando paréntesis tenemos $x^2 - (p + q)x + p\cdot q = 0$ y, por tanto $b = -(p + q)$ y $c = p\cdot q$.

a) Si las soluciones son enteras, busco dos números enteros que multiplicados den 12 y sumados den 7. Para que el producto sea 12 pueden ser: 1 y 12, –1 y –12, 2 y 6, –2 y –6, 3 y 4 o –3 y –4. La única pareja que suma 7 es 3 y 4 luego las soluciones son $x = 3$ y $x = 4$.

b) Para que el producto sea –10 tenemos: –1 y 10; 1 y –10; –2 y 5; 2 y –5. Como la suma debe ser –3, la única posibilidad es 2 y –5 luego las soluciones son $x = 2$ y $x = -5$.

**4.64. Averigua cuánto tardarás en hacer este problema si empleas $\frac{1}{18}$ en leerlo, $\frac{1}{5}$ en plantearlo, $\frac{22}{90}$ en resolverlo y 1 minutos 30 segundos en comprobar la solución.**

Si tardo *x* minutos, tenemos que $x = \frac{x}{18} + \frac{x}{5} + \frac{22x}{90} + 1{,}5$.

Multiplicando por 90: $90x = 5x + 18x + 22x + 135 \Rightarrow 45x = 135 \Rightarrow x = 3$. Tardaré tres minutos en resolverlo.

**4.66. Halla un número que sumado con su inverso da $\frac{13}{6}$.**

$x + \frac{1}{x} = \frac{13}{6}$ Multiplicando por $6x$ : $6x^2 + 6 = 13x$. Resolvemos $6x^2 - 13x + 6 = 0$.

$x = \frac{13 \pm \sqrt{169 - 4\cdot 6\cdot 6}}{2\cdot 6} = \frac{13 \pm 5}{12} = \begin{cases} \frac{3}{2} \\ \frac{2}{3} \end{cases}$. Los números buscados son $\frac{3}{2}$ y $\frac{2}{3}$ (uno el inverso del otro).

**4.67. *Halla dos números consecutivos tales que la diferencia de sus inversos sea $\frac{1}{42}$.**

$\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x} = \frac{1}{42} \Rightarrow 42x - 42(x - 1) = x(x - 1) \Rightarrow x^2 - x - 42 = 0 \Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4\cdot(-42)}}{2} = \frac{1 \pm 13}{2} = \begin{cases} 7 \\ -6 \end{cases}$

Por tanto los números buscados son 6 y 7 o – 6 y –7.

**4.71. Transforma en desigualdades estas frases.**

**a) Elena necesita correr por debajo de 16 segundos para clasificarse en una prueba.**

**b) En algunas atracciones del parque temático exigen una altura superior a 1,20 metros.**

**c) He pasado el kilómetro 125 de la A-2, pero aún no he llegado al 145.**

a) $x < 16$

b) $x > 1{,}20$

c) $125 < x < 145$

**4.72. Di si son ciertas o falsas estas afirmaciones.**

**a) Una inecuación, o no tiene solución, o tiene una, o tiene infinitas.**

**b) La solución de $x + 5 \leq 3$ es una semirrecta.**

**c) Una inecuación del tipo $x + a > b$, con $a$ y $b$ números reales, a veces no tiene solución.**

a) Verdadera. Ejemplo: $x^2 < 0$; $x^2 + 4 \leq -4$; $x^2 > 0$

b) Verdadera, es la semirrecta $(-\infty, -2]$

c) Falsa, tiene las infinitas soluciones de la semirrecta $(b - a, +\infty)$

**4.78. El aforo de un estadio de fútbol es tal, que cuando se llenan las $\frac{3}{5}$ partes acuden 1000 espectadores menos que cuando venden $\frac{2}{3}$ de las entradas. ¿Cuál es el aforo del estadio?**

Se llama $x$ al aforo del estadio.

$$\frac{3x}{5} + 1\,000 = \frac{2}{3}x \Rightarrow 9x + 15\,000 = 10x \Rightarrow x = 15\,000$$

El estadio de fútbol tiene 15 000 localidades.

**4.79. Si el precio de un artículo aumenta en un 2 %, resulta 36 euros más caro que si su precio disminuye un 4 %. ¿Cuánto cuesta ese artículo?**

Sea $x$ el precio del artículo.

$$x + \frac{2}{100}x - 36 = x - \frac{4}{100}x \Rightarrow 100x + 2x - 3600 = 100x - 4x \Rightarrow 6x = 3600 \Rightarrow x = 600$$

El artículo cuesta 600 €.

**4.80. Marcos ha comprado un reproductor MP4 en las rebajas con un 15 % de descuento. Unas semanas más tarde ha visto que podría haberse ahorrado 4 euros, porque la misma tienda lo vende con un 20 % de descuento. ¿Cuánto costaba el MP4 antes de las rebajas?**

Sea $x$ el precio del MP4.

$$x - \frac{15}{100}x = x - \frac{20}{100}x + 4 \Rightarrow 100x - 15x = 100x - 20x + 400 \Rightarrow 5x = 400 \Rightarrow x = 80$$

Antes de las rebajas, el MP4 costaba 80 €.

**4.81. En la civilización egipcia, debido a las periódicas inundaciones del Nilo, se borraban los lindes de separación de la tierra y para la reconstrucción de las fincas tenían que construir ángulos rectos.**

**En un viejo papiro se puede leer lo siguiente:**

**"La altura del muro, la distancia al pie del mismo y la línea que une ambos extremos son tres números consecutivos".**

**Halla dichos números.**

Sean los tres números consecutivos: $x$, $x + 1$, $x + 2$.

$$x^2 + (x+1)^2 = (x+2)^2 \Rightarrow x^2 + x^2 + 2x + 1 = x^2 + 4x + 4 \Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{4+12}}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = -1 \end{cases}$$

Los números serán: 3, 4 y 5.

**4.82. Un pez pesa 60 libras. La cabeza tiene tres quintos del peso del cuerpo y la cola es un tercio de la cabeza. ¿Cuánto pesará el cuerpo del pez?**

**(Piero de la Francesca, *Tratado del ábaco,* Italia, siglo *XV*).**

Si el cuerpo pesa $x$, la cabeza pesa $\frac{3}{5}$ de $x$ y la cola $\frac{1}{3}$ de ($\frac{3}{5}$ de x) = $\frac{1}{5}$ de $x$.

$$\frac{3x}{5} + x + \frac{x}{5} = 60 \Rightarrow 3x + 5x + x = 300 \Rightarrow 9x = 300 \Rightarrow x \cong 33{,}3$$

El cuerpo pesa 33,3 libras aproximadamente.

**4.83. Una compañía cena junta y cada uno de sus componentes debe pagar 175 libras. Pero dos de ellos no tienen dinero, y entonces, el resto de los comensales deben pagar cada uno 10 libras más. ¿Cuánta gente formaba la compañía?**

**(McLaurin, *Tratado del álgebra*, Inglaterra, 1748).**

Llamando $x$ al número de personas que forman la compañía tenemos que

$175x = 185\ (x - 2) \Rightarrow 10x = 370 \Rightarrow x = 37$.

La compañía está compuesta por 37 personas.

**4.84. Jaime quiere encargar a un cristalero un espejo circular, aunque no tiene claro qué tamaño le conviene. Lo que sabe es que el radio puede variar entre 20 y 25 centímetros.**

**¿Entre qué valores oscilaría el área del cristal?**

**¿Y su perímetro?**

$A = \pi r^2 \Rightarrow \pi \cdot 20^2 \leq A \leq \pi \cdot 25^2 \Rightarrow 400\pi \leq A \leq 625\pi$

Los valores enteros entre los que oscilará el área serán: 1257 $cm^2$ y 1963 $cm^2$.

$L = 2\pi r \Rightarrow 2 \cdot \pi \cdot 20 \leq L \leq 2 \cdot \pi \cdot 25^2 \Rightarrow 40\pi \leq L \leq 50\pi$

Los valores enteros entre los que oscilará la longitud serán: 126 cm y 157 cm.

**4.85. La edición de una revista tiene unos costes de 30 000 euros, a los que hay que sumar 1,50 euros de gastos de distribución por cada ejemplar. Si cada uno se vende a 3,50 euros y se obtienen unos ingresos de 12 000 euros por publicidad, ¿cuántas revistas se deben vender para empezar a obtener beneficios?**

Sea $x$ el número de revistas vendidas.

Gastos: $G = 30000 + 1{,}5x$

Beneficios: $B = 12000 + 3{,}5x$

Para obtener beneficios se tiene que cumplir la inecuación

$30000 + 1{,}5x < 12000 + 3{,}5x \Rightarrow 18000 < 2x \Rightarrow x > 9000$ .

A partir de 9000 ejemplares vendidos se empezarán a obtener beneficios.

**4.86. Dos compañías telefónicas ofertan así:**


a) **¿Cuántos minutos por mes debe el cliente llamar a móviles para que le resulte más económica la compañía *B*?**

b) **¿Cuál es el coste de la factura en este caso?**

a) $40 + 0{,}3x > 60 + 0{,}2x \Rightarrow 0{,}1x > 20 \Rightarrow x > 200$ . A partir de 200 minutos resultará más económica la compañía *B*.

b) $\text{Factura} > 60 + 0{,}2 \cdot 200 \Rightarrow \text{Factura} > 100$ €

**4.87. *En una fracción, el denominador excede en dos unidades al numerador. Si se le resta cuatro quinceavos, el resultado es una nueva fracción en la que tanto el numerador como el denominador son dos unidades menores que los de la fracción original. ¿De qué fracción se trata?**

Si llamamos $x$ al numerador de la fracción inicial obtenemos la ecuación: $\dfrac{x}{x+2} - \dfrac{4}{15} = \dfrac{x-2}{x}$.

Multiplicamos por $15x(x + 2)$: $15x^2 - 4x(x + 2) = 15(x + 2)(x - 2)$; $-4x^2 - 8x + 60 = 0$. Resolvemos la ecuación equivalente $x^2 + 2x - 15 = 0$. $x = -5$ y $x = 3$. La fracción buscada es $\dfrac{3}{5}$.

# Solucionario problemas tema 5

## SISTEMAS DE ECUACIONES

**5.23. La familia Pérez fue a la pizzería y por cinco refrescos y tres raciones de pizza pagaron 21,10 euros. Los Fernández, por tres refrescos y cuatro raciones de pizza pagaron 19,70 euros. ¿Cuánto pagarán los Gómez por seis refrescos y cuatro raciones de pizza?**

Llamando $x$ al precio de un refresco e $y$ al precio de una ración de pizza obtenemos el sistema:

$$\begin{cases} 5x + 3y = 21{,}10 \\ 3x + 4y = 19{,}70 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema por reducción tenemos que $\begin{cases} -15x - 9y = -63{,}30 \\ \phantom{-}15x + 20y = 98{,}50 \end{cases}$ . $\quad 11y = 35{,}20$

Luego, $y = 3{,}20$ y $x = \dfrac{21{,}10 - 3 \cdot 3{,}20}{5} = 2{,}30$.

Como un refresco cuesta 2,30 € y una ración de pizza cuesta 3,20 €, los Gómez pagarán:

$6 \cdot 2{,}30 + 4 \cdot 3{,}20 = 26{,}60$ €.

**5.24. La suma de dos números es 11 y la suma de sus cuadros es 73, ¿qué números son?**

Llamando $x$ e $y$ a los números plantemos el sistema:

$\begin{cases} x + y = 11 \\ x^2 + y^2 = 73 \end{cases}$ que resolvemos por sustitución despejando $x$ de la primera ecuación:

$$\begin{cases} x = 11 - y \\ x^2 + y^2 = 73 \end{cases} \Rightarrow (11 - y)^2 + y^2 = 73 \Rightarrow 121 - 22y + y^2 + y^2 = 73 \Rightarrow y^2 - 11y + 24 = 0$$

$$y = \frac{11 \pm \sqrt{121 - 4 \cdot 24}}{2} = \frac{11 \pm 5}{2} = \begin{cases} 8 \\ 3 \end{cases}$$

Si $y = 8$, $x = 11 - 8 = 3$ y si $y = 3$; $x = 11 - 3 = 8$

Los números buscados son 3 y 8.

**5.25. Andrés ha comprado una parcela rectangular de 360 m$^2$ y necesita 84 m de alambre para cercarla. ¿Cuáles son las dimensiones de la parcela?**

Llamando $x$ al largo de la parcela e $y$ al ancho plantemos el sistema:

$\begin{cases} 2x + 2y = 84 \\ xy = 360 \end{cases}$ que resolvemos por sustitución despejando $x$ de la primera ecuación:

$$\begin{cases} x = 42 - y \\ xy = 360 \end{cases} \Rightarrow (42 - y)y = 360 \Rightarrow y^2 - 42y + 360 = 0 \Rightarrow$$

$$y = \frac{42 \pm \sqrt{42^2 - 4 \cdot 360}}{2} = \frac{42 \pm 18}{2} = \begin{cases} 30 \\ 12 \end{cases}$$

Si $y = 30$, $x = 42 - 30 = 12$ y si $y = 12$; $x = 42 - 12 = 30$

Las dimensiones de la parcela son 30 metros x 12 metros.

**5.26. Escribe cada uno de estos enunciados en forma de una ecuación con dos incógnitas y señala a qué hace referencia cada una de las incógnitas.**

**a) La suma de dos números es 10.**

**b) La diferencia de dos números es 10.**

**c) El producto de dos números es 24.**

**d) El perímetro de un rectángulo mide 54 centímetros.**

**e) El número de camas de un hospital cuyas habitaciones son dobles y triples es 256.**

**f) El número de ruedas que hay entre las bicicletas y los triciclos de una tienda es 84.**

**g) En un centro de Secundaria hay 678 personasentre estudiantes y profesores.**

a) Sean $x$ e $y$ los dos números, $x + y = 10$.

b) Sean $x$ e $y$ los dos números, $x - y = 10$.

c) Sean $x$ e $y$ los dos números, $x \cdot y = 24$.

d) Sea $x$ la longitud de la base e $y$ la longitud de la altura, $2x + 2y = 54$.

e) Sea $x$ el número de habitaciones dobles e $y$ el número de habitaciones triples, $2x + 3y = 256$.

f) Sea $x$ el número de bicicletas e $y$ el número de triciclos, $2x + 3y = 84$.

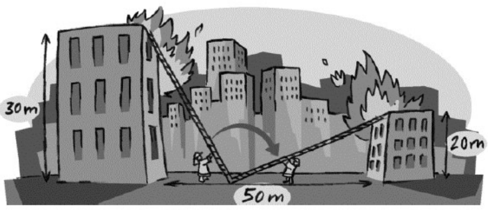
g) Sea $x$ el número de estudiantes e $y$ el número de profesores, $x + y = 678$.

**5.51. De un rombo se sabe que su área es de 120 cm² y que la proporción existente entre las diagonales mayor y menor es 10:3.**

$$\begin{cases} \dfrac{Dd}{2} = 120 \\ 3D = 10d \to d = \dfrac{3D}{10} \end{cases} \Rightarrow D\dfrac{3D}{10} = 240 \Rightarrow D^2 = 800 \Rightarrow D = 20\sqrt{2} \text{ cm} \text{ y } d = \dfrac{3 \cdot 20\sqrt{2}}{10} \Rightarrow d = 6\sqrt{2} \text{ cm}$$

**5.52. La siguiente figura muestra la posición que debe ocupar una escalera de bomberos sobre dos edificios.**

**Calcula la longitud de la escalera y la posición sobre la que debe posarse en la acera.**




$$\begin{cases} y^2 = 30^2 + x^2 \\ y^2 = 20^2 + (50 - x)^2 \end{cases} \Rightarrow 900 + x^2 = 400 + 2500 - 100x + x^2 \Rightarrow 100x = 2000 \Rightarrow x = 20 \text{ m}$$

$$y^2 = 900 + 20^2 = 1300 \Rightarrow y = \sqrt{1300} \Rightarrow y = 36{,}06 \text{ m}$$

La escalera debe medir 36,06 metros y estar situada a 20 metros de la primera casa.

**5.53. Calcula las dimensiones de un rectángulo sabiendo que su diagonal mide 15 centímetros, y su área, 108 centímetros cuadrados.**

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 15^2 \\ x \cdot y = 108 \quad \rightarrow x = \dfrac{108}{y} \end{cases} \Rightarrow \left(\frac{108}{y}\right)^2 + y^2 = 15^2 \Rightarrow 108^2 + y^4 = 225y^2 \Rightarrow y^4 - 225y^2 + 11664 = 0$$

$$y^2 = \frac{225 \pm \sqrt{225^2 - 4 \cdot 11664}}{2} = \frac{225 \pm 63}{2} \Rightarrow \begin{cases} y^2 = 144 \Rightarrow y = 12 \text{ y } x = 9 \\ y^2 = 81 \Rightarrow y = 9 \text{ y } x = 12 \end{cases}$$

Las soluciones negativas no las consideramos porque las dimensiones de un rectángulo tienen que ser positivas.

El rectángulo tendrá por dimensiones 9 cm × 12 cm.

**5.55. Encima de la mesa hay 21 monedas, de uno y de dos euros. Con un pase mágico, Matemago convierte las monedas de un euro en monedas de dos y las de dos, en monedas de uno. Si inicialmente hay 3 euros más que al principio, ¿cuántas monedas de cada tipo había al principio?**

Si suponemos que al principio hay $x$ monedas de un euro e $y$ monedas de dos euros, contando el número de monedas tenemos que $x + y = 21$.

Si contamos el dinero, al principio tenemos $x + 2y$ euros y, tras el pase mágico, tenemos $2x + y$ euros. Como al final hay tres euros más que al principio tenemos que $x + 2y + 3 = 2x + y$.

Resolvemos el sistema: $\begin{cases} x + y = 21 \\ x + 2y + 3 = 2x + y \end{cases}$ $\begin{cases} x + y = 21 \\ x - y = 3 \end{cases}$ $2x = 24$; $x = 12$; $y = 21 - 12 = 9$.

Al principio había 12 monedas de un euro y 9 monedas de dos euros.

**5.56. Por cada 4 chicas de una clase hay 5 chicos. Han venido a la clase 5 alumnas nuevas y entonces, el número de chicas y de chicos se ha igualado. ¿Cuántos pupitres debe haber en el aula?**

Si llamamos $x$ al número de chicas que había inicialmente e $y$ al número de chicos, tenemos que $\frac{x}{y} = \frac{4}{5}$; $5x = 4y$ y $x + 5 = y$.

Resolvemos el sistema: $\begin{cases} 5x = 4y \\ x + 5 = y \end{cases}$ $5x = 4(x + 5)$; $x = 20$. Al principio había 20 chicas y 25 chicos y ahora hay 25 chicas y 25 chicos por lo que son necesarios 50 pupitres.

**5.57. En casa de mi vecina, que es un poco bruja, hay gatos y cuervos. Si en total hay 24 animales y 70 patas. ¿Cuántos individuos hay de cada clase?**

Si llamamos $x$ al número de gatos e $y$ al número de cuervos, como en total hay 24 animales, tenemos que $x + y = 24$. Contando las patas de cada animal obtenemos la ecuación $4x + 2y = 70$.

Resolvemos el sistema: $\begin{cases} x + y = 24 \\ 4x + 2y = 70 \end{cases}$; $\begin{cases} -x - y = -24 \\ 2x + y = 35 \end{cases}$ $\overline{x \qquad = 11}$. Luego hay 11 gatos y 13 cuervos.

**5.58. Un examen consta de 20 preguntas de elección múltiple. Cada respuesta correcta es puntuada con tres puntos y se resta un punto por cada respuesta errónea.**

**Un alumno ha respondido a todas las preguntas y ha obtenido 36 puntos. ¿Cuántas respuestas correctas y cuántas incorrectas tuvo?**

Sea $x$ el número de respuestas correctas e $y$ el número de respuestas incorrectas.

$$\begin{cases} x + y = 20 \\ 3x - y = 36 \end{cases} \Rightarrow 4x = 56 \Rightarrow x = 14 \Rightarrow y = 20 - x \Rightarrow y = 20 - 14 \Rightarrow y = 6$$

Respondió 14 preguntas de manera correcta y 6 de manera incorrecta.

**5.59. Un grupo de alumnos ha pagado 177 € por tres entradas de patio y seis de palco. Otro grupo por 2 entradas de patio y 2 de palco ha pagado 82 €. Calcula los precios de cada localidad.**

Llamamos *x* precio de las entradas de patio e *y* al precio de las entradas de palco.

Planteamos el sistema: $\begin{cases} 3x + 6y = 177 \\ 2x + 2y = 82 \end{cases}$.

$$\begin{array}{l} \begin{cases} 3x + 6y = 177 \\ -3x - 3y = -123 \end{cases} \\ \hline \quad 3y \qquad = 54 \end{array}$$

. Luego $y = 18$ y $x = 41 - 18 = 23$

Las entradas de patio costaban 23 € y las de palco, 18 €.

**5.60. En un hotel hay habitaciones dobles y triples. En total hay 43 habitaciones y 105 camas. Si la habitación doble cuesta 30 euros por noche y la triple 40 euros por noche. ¿Cuánto se recauda el día que el hotel esté completo?**

Si llamamos *x* al número de habitaciones dobles e *y* al número de habitaciones triples, en total habrá $2x + 3y$ camas.

Planteamos el sistema: $\begin{cases} x + y = 43 \\ 2x + 3y = 105 \end{cases}$

$$\begin{array}{l} \begin{cases} -2x - 2y = -86 \\ 2x + 3y = 105 \end{cases} \\ \hline \qquad\quad y = 19 \end{array} \qquad x = 43 - 19 = 24$$

Como hay 24 habitaciones dobles y 19 triples, cuando el hotel esté completo se recaudarán:

$30 \cdot 24 + 40 \cdot 19 = 1480$ €.

**5.61. Una empresa de reciclado de papel mezcla pasta de papel de baja calidad, que compra por 0,25 € el kilogramo, con pasta de mayor calidad, de 0,40 € el kilogramo, para conseguir 50 kilogramos de pasta de 0,31 € el kilogramo. ¿Cuántos kilogramos utiliza de cada tipo de pasta?**

Sea *x* el número de kilogramos que utilizamos de la pasta de baja calidad e *y* los kilogramos de pasta de alta calidad.

Planteamos el sistema:

$$\begin{cases} x + y = 50 \\ 0{,}25x + 0{,}4y = 50 \cdot 0{,}31 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{r} \left.\begin{array}{r} 0{,}25x + 0{,}25y = 12{,}5 \\ 0{,}25x + 0{,}4y = 15{,}5 \end{array}\right\} \\ \hline -0{,}15y = -3 \rightarrow y = 20 \;\text{ y }\; x = 30 \end{array}$$

Se utilizan 30 kg de pasta de baja calidad y 20 kg de pasta de mayor calidad.

**5.62. Se van a repartir 400 euros entre varias personas. El día del reparto faltaron 5 y así a cada asistente le correspondieron 4 € más de lo que en un principio le tocaba. ¿Cuántas personas había al inicio?**

Si llamamos $x$ al número de personas que había al principio e $y$ al dinero que le correspondía a cada una tenemos que:

$$\begin{cases} xy = 400 \\ (x-5)(y+4) = 400 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy = 400 \\ xy + 4x - 5y - 20 = 400 \end{cases}$$

$$y = \frac{400}{x}; \quad x \cdot \frac{400}{x} + 4x - 5 \cdot \frac{400}{x} - 20 = 400;$$

$$400 + 4x - \frac{2000}{x} - 20 = 400$$

Multiplicando por $x$ y dividiendo entre 4 obtenemos la ecuación de segundo grado:

$$x^2 - 5x - 500 = 0 \Rightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 4 \cdot (-500)}}{2} = \frac{5 \pm 45}{2} = \begin{cases} 25 \\ -20 \end{cases}.$$

Como $x$ debe ser un número positivo, al principio había 25 personas.

**5.63. Para hacer un regalo a un compañero, los estudiantes de una clase han recogido 24,50 euros en monedas de un euro y de 50 céntimos, siendo el total de monedas 34. ¿Cuántas monedas hay de cada valor?**

Si llamamos $x$ al número de monedas de un euro e $y$ al número de monedas de 50 céntimos:

Contando las monedas obtenemos la ecuación $x + y = 34$.

Contando el dinero tenemos $x + 0{,}5y = 24{,}5$.

Resolvemos el sistema $\begin{cases} x + y = 34 \\ x + 0{,}5y = 24{,}5 \end{cases}$

$$\begin{array}{r} \begin{cases} x + y = 34 \\ -x - 0{,}5y = -24{,}5 \end{cases} \\ \hline 0{,}5y = 9{,}5 \end{array}$$

Así pues $y = 19$ y $x = 34 - 19 = 15$.

Había 15 monedas de un euro y 19 monedas de 50 céntimos.

**5.64. Si en una reunión hubiera 5 mujeres más, habría tantos hombres como mujeres. Sin embargo, si hubiera 5 hombres más, habría doble número de hombres que de mujeres.**

**¿Cuántas personas hay en la reunión?**

Llamando $x$ al número de mujeres e $y$ al número de hombres que hay en la fiesta tenemos que:

$$\begin{cases} x + 5 = y \\ y + 5 = 2x \end{cases} \quad x + 5 + 5 = 2x; \quad x = 10 \quad y = 10 + 5 = 15.$$

Había 10 mujeres y 15 hombres.

**5.65.** **Un fabricante de ventanas recibe un pedido para un día determinado. Haciendo cálculos se da cuenta de que si fabrica 90 ventanas al día, le faltarán 100 ventanas para completar el pedido y si fabrica 100 ventanas diariamente, el día de entrega tendrá 200 ventanas de más.**

**¿Cuántos días de plazo tenía y cuántas ventanas le han encargado?**

Si llamamos $x$ al número de ventanas que debe fabricar e $y$ al número de días que tiene para hacerlas tenemos que:

$$\begin{cases} 90y = x - 100 \\ 100y = x + 200 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 90y + 100 = x \\ 100y - 200 = x \end{cases} \Rightarrow 90y + 100 = 100y - 200 \Rightarrow 10y = 300 \Rightarrow y = 30$$

$$\Rightarrow x = 100 \cdot 30 - 200 = 2800$$

Debe fabricar 2800 ventanas en 30 días.

**5.66.** *


Sea $x$ la edad actual de la abuela e $y$ la edad actual del niño.

$$\begin{cases} x - 4 = 16(y - 4) \\ x + 2 = 7(y + 2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - 4 = 16y - 64 \\ x + 2 = 7y + 14 \end{cases} \qquad \begin{array}{r} x - 16y = -60 \\ x - 7y = 12 \\ \hline -9y = -72 \end{array} \Rightarrow y = 8$$

$$x - 4 = 16 \cdot 8 - 64 \Rightarrow x = 68$$

La abuela tiene 68 años y el niño tiene 8 años.

**5.67. Cecilia quiere estudiar la evolución de las características físicas de cinco especies animales. Por ello ha observado de forma especial a un ejemplar de cada una de ellas.**

**Una de las variables que se estudian es la masa corporal de cada una a los 18 meses de vida. Inexplicablemente, en su libreta solo tiene estos datos.**

**Calcula la masa que tenía el cerdo en esa época.**

| | |
|---|---|
| **Perro + gato** | **30** |
| **Perro + pato** | **27** |
| **Perro + cerdo** | **107** |
| **Perro + cabra** | **86** |
| **Gato + pato** | **13** |

Gato + pato = 13 $\rightarrow$ pato = 13 – gato

Tomando la primera y la segunda tenemos un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas.

$$\begin{cases} \text{Perro} + \text{gato} = 30 \\ \text{Perro} + (13 - \text{gato}) = 27 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{Perro} + \text{gato} = 30 \\ \text{Perro} - \text{gato} = 14 \end{cases} \Rightarrow 2 \cdot \text{Perro} = 44 \Rightarrow \text{Perro} = 22 \text{ kg}$$

Perro + cerdo = 107. Por tanto cerdo = 107 – 22. La masa del cerdo es de 85 kg.

**5.68. Utilizando la regla de la división, averigua el dividendo y el divisor de la misma sabiendo que el cociente es 2; el resto, 7, y el producto de ambos es igual a 490.**

$$\begin{cases} D = 2d + 7 \\ D \cdot d = 490 \end{cases} \Rightarrow (2d+7)d = 490 \Rightarrow 2d^2 + 7d - 490 = 0 \Rightarrow d = \frac{-7 \pm \sqrt{49 + 4 \cdot 2 \cdot 490}}{4} \Rightarrow \begin{cases} d = 14 \text{ y } D = 35 \\ d = -17{,}5 \end{cases}$$

El resultado $d = -17{,}5$ no es entero, por eso no lo consideramos.

**5.69. Halla los catetos de un triángulo rectángulo de 41 m de hipotenusa y de 180 m$^2$ de área.**

Llamando a los catetos $x$ e $y$, sabemos que el área es $\frac{xy}{2} = 180$y, por el teorema de Pitágoras tenemos que $x^2 + y^2 = 41^2$ .

Resolvemos el sistema:

$$\begin{cases} xy = 360 \\ x^2 + y^2 = 1681 \end{cases} \Rightarrow y = \frac{360}{x} \Rightarrow x^2 + \left(\frac{360}{x}\right)^2 = 1\,681 \Rightarrow x^4 - 1\,681x^2 + 129\,600 = 0$$

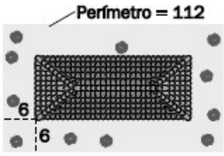
Haciendo el cambio $a = x^2$ resolvemos la ecuación bicuadrada:

$$a = \frac{1681 \pm \sqrt{1681^2 - 4 \cdot 129\,600}}{2} = \frac{1681 \pm 1519}{2} = \begin{cases} 1600 \\ 81 \end{cases}$$

Si $a = 1600$, $x = 40$ e $y = \frac{360}{40} = 9$ (rechazamos la solución $x = -40$ pues se trata del lado de un triángulo). Si $a = 81$, $x = 9$ e $y = \frac{360}{9} = 40$.

Los catetos miden 40 m y 9 m.

**5.70.** ***Calcula las dimensiones de la parcela sabiendo que el área del jardín es de 475 m²**.




Llamando $x$ al largo de la parcela e $y$ al ancho, como el perímetro es 112 metros tenemos que

$2x + 2y = 112$; $x + y = 56$.

Como el jardín mide $x - 6$ metros de largo por $y - 6$ de ancho, su área es $(x - 6)(y - 6) = 475$.

Resolvemos por sustitución el sistema:

$$\begin{cases} x + y = 56 \\ (x-6)(y-6) = 475 \end{cases} \quad x = 56 - y; \quad (56 - y - 6)(y - 6) = 475; \quad 50y - 300 - y^2 + 6y = 475;$$

$$y^2 - 56y + 775 = 0;\ y = \frac{56 \pm \sqrt{56^2 - 4 \cdot 775}}{2} \cong \frac{56 \pm 6}{2} = \begin{cases} 31 \\ 25 \end{cases}$$

El largo mide 31 metros y el ancho, 25 metros.

**5.71.** **Las edades actuales de Ana y de su hijo son 49 y 25 años, respectivamente. ¿Hace cuántos años el producto de sus edades era 640?**

Hace $x$ años: $(49 - x)(25 - x) = 640 \Rightarrow 1225 - 74x + x^2 = 640 \Rightarrow x^2 - 74x + 585 = 0$.

$$x = \frac{74 \pm \sqrt{(-74)^2 - 4 \cdot 585}}{2} = \frac{74 \pm 56}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 65 \\ x = 9 \end{cases}$$

Hace 65 años no pudo ser porque no habían nacido. Por tanto, la respuesta correcta es hace 9 años.

**5.72.** **Un rectángulo tiene una superficie de 120 cm². Si se duplica su base y se aumenta su altura en 5 cm, el nuevo rectángulo tiene una superficie de 340 cm². ¿Cuáles eran las dimensiones del rectángulo original?**

Llamando $x$ e $y$ a las dimensiones del rectángulo original, su área es $xy$ y las dimensiones del nuevo rectángulo son $2x$ e $y + 5$ por lo que su área es $2x(y + 5)$. Planteamos el sistema:

$$\begin{cases} xy = 120 \\ 2x(y+5) = 340 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} xy = 120 \\ 2xy + 10x = 340 \end{cases}$$

Sustituyendo $xy$ por 120 en la ecuación de abajo:

$$240 + 10x = 340 \Rightarrow x = 10 \Rightarrow y = \frac{120}{10} \Rightarrow y = 12.$$

La base del rectángulo original medía 10 cm y su altura 12 cm.

**5.73. Un envase de leche de un litro de capacidad tiene forma de ortoedro de 20 cm de altura. Si para construirlo se necesitan 670 cm² de cartón, ¿cuáles son las dimensiones de la base?**

Llamando $x$ e $y$ a las dimensiones de la base, la capacidad es $20xy$ cm³ y como un litro son 1000 cm³, tenemos la primera ecuación: $20xy = 1000$.

El cartón necesario es: $2xy + 40x + 40y = 670$.

Simplificando ambas ecuaciones tenemos el sistema:

$$\begin{cases} xy = 50 \\ xy + 20x + 20y = 335 \end{cases}$$

$$y = \frac{50}{x} \Rightarrow 50 + 20x + 20 \cdot \frac{50}{x} = 335 \Rightarrow 20x^2 - 285x + 1000 = 0$$

$$x = \frac{285 \pm \sqrt{285^2 - 4 \cdot 20 \cdot 1000}}{2 \cdot 20} = \frac{285 \pm 35}{40} = \begin{cases} 8 \\ \frac{25}{4} \end{cases}$$

La base mide 8 cm por 6,25 cm.

**5.74. Estoy buscando un número de dos cifras que suman 10 y si intercambio sus cifras, obtengo otro número que supera en 36 unidades al número inicial. ¿Cuál es el número que busco?**

Si la cifra de las decenas del número inicial es $x$ y la cifra de las unidades es $y$, el número se expresará $10x + y$.

Sabemos que $x + y = 10$ y que el número $10y + x$ es 36 unidades mayor que el número $10x + y$.

Tenemos el sistema:

$$\begin{cases} x + y = 10 \\ 10x + y + 36 = 10y + x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 10 \\ 9x - 9y = -36 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 10 \\ x - y = -4 \end{cases}.$$

La solución del sistema es $x = 3$ e $y = 7$. El número buscado es 37.